**12. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.**

**1)Уравнение в полных дифференциалах.**

Уравнение

http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_68.gif        (1)

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_69.gif, т.е.

http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_70.gif.

**Теорема.**

*Если функции http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_4.gif непрерывны в некоторой односвязной области http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_5.gif, то условие*

*http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_6.gif*

*является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение*

*http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_7.gif*

*было полным дифференциалом функции http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_69.gif.*

Если известна функция, полным дифференциалом которой является левая часть  уравнения (1), то все решения этого уравнения имеют вид http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_8.gif, где http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_9.gif- произвольная постоянная или

Чтобы найти функцию *http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_69.gif*нужно воспользоваться равенствами

http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_10.gif.                                                    (2)

Интегрируя первое из этих равенств по x, определим функцию *http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_69.gif* с точностью до произвольной дифференцируемой функции переменного y:

http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_11.gif,                                              (3)

где http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_12.gif - произвольная дифференцируемая функция. Функция http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_13.gif, такая что http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_73.gif. Дифференцируя (3) по y, с учетом второго равенства из (2) получаем уравнение для определения http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_12.gif:

http://www.math.kemsu.ru/library/book-du/images/YMM/PD/mater_15.gif.

**2)Интегрирующий множитель**

Существуют  уравнения  вида   (7.1)    http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image050.gif, которые не являются уравнениями в полных дифференциалах, но после умножения обеих частей уравнения на некоторую функцию http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image052.gif получается уравнение в полных дифференциалах

http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image054.gif

Функция  http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image052.gif  называется  **интегрирующим множителем, а функция U соответствующим ему интегралом  уравнения (7.1).**

Ясно, что если заданное уравнение уже является уравнением в полных дифференциалах, то  http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image056.gif

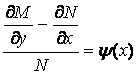
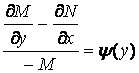
Интегрирующий множитель должен удовлетворять уравнению с частными производны-ми :             http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image058.gif                      **(7.7)**

Если  заранее известно, что http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image060.gif является  некоторой  функцией  от http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image062.gif, http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image064.gif,  где  http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image062.gif заданная  функция от   http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image066.gif то уравнение  (7.7) сводится к линейному уравнению относительно неизвестной функции  http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image060.gif, зависящей от переменной http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image062.gif:

http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image069.gif,                                                                  **(7.8)**

где                                    .                                                           **(7.9)**

            Решив уравнение  (7.8), найдем интегрирующий множитель   http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image064.gif.В частности, если выполнено условие

        либо           ,             **(7.10)**

то интегрирующий множитель  http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image077.gif      либо       http://www.mathelp.spb.ru/DU/p7.files/image079.gif.

**Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесконечное число интегрирующих множителей** (при выполнении условий существования единственного решения).

**Если известны два интегрирующих множителя, отношение которых не является постоянной, то их отношение является общим интегралом дифференциального уравнения:**

M_2/M_1~=~CM1 и M2 – интегрирующие множители

**13. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка.**

Решение y=φ(x) дифференциального уравнения

F(x,y,y′)=0

|  |
| --- |
| (1) |

называется ***особым***, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, т. е. если через каждую его точку (x0,y0)

кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в точке (x0,y0)

ту же касательную, что и решение y=φ(x), но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности (x0,y0).

График особого решения будем называть особой интегральной кривой уравнения (1). Если функция

F(x,y,y′)

и ее частные производные ∂F/∂y и ∂F/∂y′ непрерывны по всем аргументам

x,y,y′, то любое особое решение уравнения (1) удовлетворяет также уравнению

(∂/∂y′)\*F(x,y,y′)=0

|  |
| --- |
| (2) |

Значит, чтобы отыскать особые решения (1), надо исключить y′ из уравнений (1) и (2).

Полученное после исключения y′ из (1) и (2) уравнение ψ(x,y)=0 (3)

называется ***p-дискриминантом уравнения*** (1), а кривая, определяемая уравнением (3), называется ***p-дискриминантной кривой*** (коротко PDK).

Часто бывает так, что PDK  *распадается на несколько ветвей*. Тогда нужно установить, является ли каждая в отдельности ветвь решением уравнения (1), и если является, то будет ли оно особым решением, т.е. нарушается ли единственность в каждой его точке.